

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛，则 ( )

(A)  $a < 1$  且  $b > 1$  (B)  $a > 1$  且  $b > 1$  (C)  $a < 1$  且  $a+b > 1$  (D)  $a > 1$  且  $a+b > 1$

【答案】 (C)

【解析】  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  在 ( $p < 1$  时收敛)，可知  $a < 1$ ，而此时  $(1+x)^b$  不影响

$$\text{同理，} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^b} dx$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  ( $p > 1$  时收敛)，而此时  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^b$  不影响

(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

$$(A) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases} \quad (B) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(C) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (D) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

【答案】 (D)



考研帮  
KAOYAN.COM

【解析】由已知可得,  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + C_1 & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + C_1 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ , 取  $C_1 = 0$ , 故选 D

(3) 若  $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$ ,  $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$  是微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个解, 则  $q(x) = ( \quad )$

(A)  $3x(1+x^2)$  (B)  $-3x(1+x^2)$  (C)  $\frac{x}{1+x^2}$  (D)  $-\frac{x}{1+x^2}$

【答案】(A)

【解析】 $y_1 - y_2 = -2\sqrt{1+x^2}$  是一阶齐次微分方程  $y' + p(x)y = 0$  的解, 代入得

$-2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + p(x)(-2\sqrt{1+x^2}) = 0$ , 所以  $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ , 根据解的性质得,  $\frac{y_1 + y_2}{2}$  是

$y' + p(x)y = f(x)$  的解。所以有  $q(x) = 3x(1+x^2)$ 。

(4) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$ , 则 ( )

(A)  $x = 0$  是  $f(x)$  的第一类间断点 (B)  $x = 0$  是  $f(x)$  的第二类间断点

(C)  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续但不可导 (D)  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导

【答案】(D)

【解析】由于  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-0}{x} = 1$ ,  $f'_+(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n}} = 1$ , 故选 D。

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ( )

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似 (B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似

(C)  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似 (D)  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似



考研帮  
KAOYAN.COM

【答案】(C)

【解析】此题是找错误的选项。由  $A$  与  $B$  相似可知, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ , 则

$$(1) (P^{-1}AP)^T = B^T \Rightarrow P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T \Rightarrow A^T \sim B^T, \text{故 (A) 不选;}$$

$$(2) (P^{-1}AP)^{-1} = B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = B^{-1} \Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}, \text{故 (B) 不选;}$$

$$(3) P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1} \Rightarrow A + A^{-1} \sim B + B^{-1}, \text{故 (D) 不选;}$$

此外, 在 (C) 中, 对于  $P^{-1}(A + A^T)P = P^{-1}AP + P^{-1}A^T P$ , 若  $P^{-1}AP = B$ , 则  $P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T$ , 而  $P^{-1}A^T P$  未必等于  $B^T$ , 故 (C) 符合题意。综上可知, (C) 为正确选项。

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3) = 2$  在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ( )

(A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

【答案】(B)

【解析】对于二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ , 其矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

接下来由  $|\lambda E - A| = 0$ , 可得其特征值为  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  (一正两负)。故二次型

$f(x_1, x_2, x_3)$  的标准形为  $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ , 即

$$5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 2 \Rightarrow \frac{y_1^2}{(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y_3^2}{(\sqrt{2})^2} = 1, \text{其对应的曲面为双叶双曲面。}$$



考研帮  
KAOYAN.COM

(7) 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ , 记  $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$ , 则 ( )

- (A)  $p$  随着  $\mu$  的增加而增加 (B)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加  
(C)  $p$  随着  $\mu$  的增加而减少 (D)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而减少

【答案】(B)

【解析】 $P\{X \leq \mu + \sigma^2\} = P\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \sigma\}$

所以概率随着  $\sigma$  的增大而增大。

(8) 随机试验  $E$  有三种两两不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三种结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ , 将

试验  $E$  独立重复做 2 次,  $X$  表示 2 次试验中结果  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示 2 次试验中结果  $A_2$  发生的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为 ( )

- (A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{3}$

【答案】(A)

【解析】 $X \sim B(2, \frac{1}{3}), Y \sim B(2, \frac{1}{3})$

$$EX = EY = \frac{2}{3}, DX = DY = \frac{4}{9}, EXY = 1 \cdot 1 \cdot P(X=1, Y=1) = \frac{2}{9}$$

$$\text{所以 } \rho_{XY} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{2}$$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x \sin x)}{2x^3} = \frac{1}{2}$

(10) 向量场  $A(x, y, z) = (x+y+z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  的旋度  $\text{rot} A = \underline{\hspace{2cm}}$



考研帮  
KAOYAN.COM

【答案】  $(0, 1, y-1)$

【解析】 由旋度公式得,  $\text{rot}(A) = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = \{0, 1, y-1\}$

11、设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  有方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则

$$dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $-dx + 2dy$

【解析】  $(x+1)x - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  两边分别关于  $x, y$  求导得

$$z + (x+1)z'_x = 2xf'(x-z, y) + x^2 f'_1(x-z, y)(1-z'_x), \text{ 将 } x=0, y=1, z=1 \text{ 代入得,} \\ (x+1)z'_y - 2y = x^2(f'_1(x-z, y)(-z'_y) + f'_2(x-z, y))$$

$$dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$$

(12) 设函数  $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$ , 且  $f'''(0) = 1$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】  $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x(1 - ax^2 + o(x^2)) = \left(a - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3)$ , 又由于

$$f'''(0) = 1,$$

$$a = \frac{1}{2}$$



考研帮  
KAOYAN.COM



(13) 行列式  $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】  $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$

【解 析】

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

(14) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值  $\bar{x} = 9.5$ , 参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 (8.2, 10.8)

【解析】  $P\{-u_{0.025} < \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{0.025}\} = P\{\bar{x} - u_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < u < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025}\} = 0.95$

因为  $\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025} = 10.8$ , 所以  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025} = 1.3$ , 所以置信下限  $\bar{x} - u_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8.2$ .

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 已知平面区域  $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ ,

计算二重积分  $\iint_D x dx dy$ .



考研帮  
KAOYAN.COM

【答案】  $5\pi + \frac{32}{3}$  |

【解析】 
$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{r^3}{3} \bigg|_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta) d\theta \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta + 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta + \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta + 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta) d\sin\theta + \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\sin\theta \\ &= 4 \left( \frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 8 \left( \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= 4\pi + \frac{32}{3} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= 5\pi + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分) 设函数  $y(x)$  满足方程  $y'' + 2y' + ky = 0$ , 其中  $0 < k < 1$ .

(I) 证明: 反常积分  $\int_0^{+\infty} y(x) dx$  收敛;

(II) 若  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ , 求  $\int_0^{+\infty} y(x) dx$  的值.

【答案】 (II)  $\frac{3}{k}$

【解析】

(1) 特征方程为  $r^2 + 2r + k = 0$ , 由  $0 < k < 1$  可知, 特征方程有两个不相同的特征根

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4k}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-k} \text{ 且 } r_{1,2} < 0,$$

由二阶常系数齐次线性方程的求解可知,  $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$



考研帮  
KAOYAN.COM

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} y(x) dx &= \int_0^{+\infty} [C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}] dx \\
 &= \int_0^{+\infty} C_1 e^{r_1 x} dx + \int_0^{+\infty} C_2 e^{r_2 x} dx \\
 &= \frac{C_1}{r_1} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{r_1 x} - 1 \right] + \frac{C_2}{r_2} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{r_2 x} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

由于  $r_{1,2} < 0$

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx = -\frac{C_1}{r_1} - \frac{C_2}{r_2} \text{ 极限存在, 故收敛.}$$

(2) 由  $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  可知,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = 1 \\ r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k} \end{cases} \text{ 解得 } C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{代入 } \int_0^{+\infty} y(x) dx = -\frac{C_1}{r_1} - \frac{C_2}{r_2} \text{ 可知 } \int_0^{+\infty} y(x) dx = \frac{\sqrt{1-k}}{k}$$

(17) (本题满分 10 分) 设函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$ , 且  $f(0, y) = y+1, L_t$

是从点  $(0, 0)$  到点  $(1, t)$  的光滑曲线, 计算曲线积分  $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ , 并

求  $I(t)$  的最小值

【答案】3



考研帮  
KAOYAN.COM



【解析】

$$(1) \text{ 由 } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y},$$

$$\begin{aligned}\text{可知: } f(x, y) &= \int [(2x+1)e^{2x-y}] dx \\ &= e^{-y} \left[ \int 2xe^{2x} dx + \int e^{2x} dx \right] \\ &= e^{-y} \cdot xe^{2x} + \varphi(y) \\ &= xe^{2x-y} + \varphi(y)\end{aligned}$$

$$\text{又 } f(0, y) = y+1 \quad \text{可知 } \varphi(y) = y+1$$

$$\text{因此 } f(x, y) = xe^{2x-y} + y+1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -xe^{2x-y} + 1$$

$$I(t) = \int_{Lt} (2x+1)e^{2x-y} dx + (1 - xe^{2x-y}) dy$$

$$P = (2x+1)e^{2x-y} \quad Q = 1 - xe^{2x-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -(2x+1)e^{2x-y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{2x-y} - 2xe^{2x-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{因此, 积分与路径无关}$$

$$\begin{aligned}I(t) &= \int_{Lt} (2x+1)e^{2x-y} dx + (1 - xe^{2x-y}) dy \\ &= \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx + \int_0^t (1 - e^{2-y}) dy \\ &= e^2 + t + e^{2-t} - e^2\end{aligned}$$



考研帮  
KAOYAN.COM

$$= t + e^{2-t}$$

$$(2) I(t) = t + e^{2-t}$$

$$I'(t) = 1 - e^{2-t}$$

$$I'(t) = 0 \quad \text{可知 } t = 2$$

有唯一驻点

$$I''(t) = e^{2-t}$$

$$I''(2) = 1 > 0$$

因此  $t = 2$  时  $I(t)$  有最小值

$$I(2) = 2 + e^{2-2} = 2 + 1 = 3$$

(18) 设有界区域  $\Omega$  由平面  $2x + y + 2z = 2$  与三个坐标平面围成,  $\Sigma$  为  $\Omega$  整个表面的外侧,

$$\text{计算曲面积分 } I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dy dz - 2y dz dx + 3z dx dy$$

【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dy dz - 2y dz dx + 3z dx dy$$

$$P = x^2 + 1, Q = -2y, R = 3z$$

由高斯公式可知,

$$I = \iiint_{\Omega} (2x - 2 + 3) dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x + 1) dx dy dz$$

$$= \iint dx dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} (2x+1) dz$$



考研帮  
KAOYAN.COM

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_x} \left( 2x^2 + x - xy - \frac{y}{2} \right) dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-2x} \left( 2x^2 + x - xy - \frac{y}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0)=1$ ,  $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ , 设数列  $\{x_n\}$

满足  $x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ , 证明:

(I) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  绝对收敛;

(II)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$ .

【证明】  $x_{n+1} = f(x_n)$

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |f'(\xi)(x_n - x_{n-1})|$$

$$< \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|$$

$$= \frac{1}{2} |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|$$

$$< \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$< L$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$$

显然,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$  收敛



考研帮  
KAOYAN.COM

因此,  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  绝对收敛;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  的前  $n$  项和记为  $S_n$

易知,  $S_n = x_{n+1} - x_1$ , 由第一问可知  $S_n$  极限存在, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  存在

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x_n) - f(0) + 1$$

$$= f'(\xi)x_n + 1 \quad (*)$$

i) 由已知  $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ , 易知  $x_{n+1} = f'(\xi)x_n + 1 < \frac{1}{2}x_n + 1$

不等式两边取极限, 可知  $A < \frac{1}{2}A + 1$ , 即  $A < 2$ ;

ii) 若  $A = 0$ , 则  $(*)$  矛盾;

iii) 若  $A < 0$ , 则由  $(*)$  可知  $(1 - f'(\xi))A = 1$ , 而  $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ , 显然矛盾

综上,  $0 < A < 2$

(20) (本题满分 11 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$

当  $a$  为何值时, 方程  $AX = B$  无解、有唯一解、有无穷多解?



考研帮  
KAOYAN.COM

【答案】 $a = -2$ 时, 无解;  $a = 1$ 时, 有无穷多解,  $X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -k_1 - 1 & -k_2 - 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ ;  $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$

时, 有唯一解,  $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】(20) (本题满分 11 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$

当  $a$  为何值时, 方程  $AX = B$  无解、有唯一解、有无穷多解?

【答案】 $a = -2$ 时, 无解;  $a = 1$ 时, 有无穷多解,  $X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -k_1 - 1 & -k_2 - 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ ;  $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$

时, 有唯一解,  $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】对  $AX = B$  的增广阵做初等变换

$$(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-11-a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1)  $|A| \neq 0$ , 即  $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, 唯一解。

2)  $|A| = 0$ 时 $a = 1$ 或 $a = -2$

1、 $a = -2$ 时, 代入得矛盾方程, 无解。

2、 $a = 1$ 时, 代入得 $r(A) < 3$ , 故无穷多解。



考研帮  
KAOYAN.COM



(21) (本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求  $A^{99}$

(II) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

【答案】 (1)  $\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2,$$

$$(2) \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2,$$

$$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$$

【解析】

(I) 利用相似对角化。

$$\text{由 } |\lambda E - A| = 0, \text{ 可得 } A \text{ 的特征值为 } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \text{ 故 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{当 } \lambda_1 = 0 \text{ 时, 由 } (0E - A)x = 0, \text{ 解出此时 } A \text{ 的属于特征值 } \lambda_1 = 0 \text{ 的特征向量为 } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$



考研帮  
KAOYAN.COM

当  $\lambda_2 = -1$  时, 由  $(-E - A)x = 0$ , 解出此时  $A$  的属于特征值  $\lambda_2 = -1$  的特征向量为

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

当  $\lambda_3 = -2$  时, 由  $(-2E - A)x = 0$ , 解出此时  $A$  的属于特征值  $\lambda_3 = -2$  的特征向量为

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{设 } P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 由 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \text{ 可得 } A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1},$$

$$\text{对于 } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 利用初等变换, 可求出 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 故}$$

$$A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



考研帮  
KAOYAN.COM

( II )  $B^2 = BA \Rightarrow B^3 = BBA = B^2A = BAA = BA^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B^{100} = BA^{99}$  , 由于  
 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ,  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  , 故

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{99} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 因此,}$$

$$\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2, \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2, \beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2.$$

(22)(本题满分 11 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$  上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

- (I) 写出  $(X, Y)$  的概率密度;  
 (II) 问  $U$  与  $X$  是否相互独立? 并说明理由;  
 (III) 求  $Z = U + X$  的分布函数  $F(z)$ .

【答案】

$$(I) f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(II) U \text{ 与 } X \text{ 不独立, 因为 } P\left\{U \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\right\} \neq P\left\{U \leq \frac{1}{2}\right\} P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\},$$

(III)  $Z$  的分布函数



考研帮  
 KAOYAN.COM

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

【解析】(1) 区域 D 的面积  $s(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$ , 因为  $f(x, y)$  服从区域 D 上的均匀分布, 所以

$$f(x, y) = \begin{cases} 3 & x^2 < y < \sqrt{x} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) X 与 U 不独立.

$$\text{因为 } P\left\{U \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\right\} = P\left\{U=0, X \leq \frac{1}{2}\right\} = P\left\{X > Y, X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{12}$$

$$P\left\{U \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

所以  $P\left\{U \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\right\} \neq P\left\{U \leq \frac{1}{2}\right\} P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ , 故 X 与 U 不独立。

$$(3) F_Z(z) = P\{U+X \leq z\} = P\{U+X \leq z | U=0\}P\{U=0\} + P\{U+X \leq z | U=1\}P\{U=1\}$$

$$= \frac{P\{U+X \leq z, U=0\}}{P\{U=0\}} P\{U=0\} + \frac{P\{U+X \leq z, U=1\}}{P\{U=1\}} P\{U=1\}$$

$$= P\{X \leq z, X > Y\} + P\{1+X \leq z, X \leq Y\}$$



考研帮  
KAOYAN.COM

$$\text{又} \quad P\{X \leq z, X > Y\} = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 1 \end{cases},$$

$$P\{X+1 \leq z, X \leq Y\} = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

$$(23) \text{ 设总体 } X \text{ 的概率密度为 } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta \in (0, +\infty) \text{ 为未知参数,}$$

$X_1, X_2, X_3$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 令  $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ 。

(1) 求  $T$  的概率密度

(2) 确定  $a$ , 使得  $aT$  为  $\theta$  的无偏估计

【答案】

(1)  $T$  的概率密度

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{9x^3}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



考研帮  
KAOYAN.COM